ВЕРОВАТНОЋА

ТЕРМОДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ КОЈЕ РАЗМАТРАМО САСТОЈЕ СЕ ОД ВЕЛИКОГ БРОЈА ЧЕСТИЦА ЧИЈЕ СЕ КРЕТАЊЕ НЕ МОЖЕ ДЕТАЉНО РАЗМАТРАТИ ЗБОГ ОГРОМНОГ БРОЈА ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА И НЕПОЗНАВАЊА ПОЧЕТНИХ УСЛОВА. МАКРОСКОПСКЕ КООРДИНАТЕ НАМ ОМОГУЋАВАЈУ САМО ОГРАНИЧЕНЕ ИНФОРМАЦИЈЕ О ПОЧЕТНИМ УСЛОВИМА ВЕЗАНИМ ЗА КРЕТАЊЕ ЧЕСТИЦА ЈЕР ОГРОМАН БРОЈ РАЗЛИЧИТИХ МИКРОСТАЊА ОДГОВАРА ЈЕДНОМ МАКРОСТАЊУ. ВЕРОВАТНОЋА ПРЕДСТАВЉА МАТЕМАТИЧКИ ЈЕЗИК ЗА КВАНТИФИКАЦИЈУ НЕИЗВЕСНОСТИ И ЗАТО ЈЕ ПОГОДНА ДА ПОВЕЖЕ МИКРО И МАКРОСТАЊА.

ВЕРОВАТНОЋА

ЕКСПЕРИМЕНТ (ПРОЦЕС ЗА СТВАРАЊЕ ПОДАТАКА) $\rightleftarrows$ ИСХОД (УОЧЕНИ ПОДАЦИ)

СТАТИСТИКА

РАЗМОТРИМО ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ВЕРОВАТНОЋЕ И СТАТИСТИКЕ ДАТУ НА СЛИЦИ. ВЕРОВАТНОЋА СЕ ОДНОСИ НА ПИТАЊЕ АКО ПОЗНАЈЕМО ПРОЦЕС ЗА СТВАРАЊЕ ПОДАТАКА КАКВЕ СУ ОСОБИНЕ ИСХОДА ТОГ ПРОЦЕСА? СТАТИСТИКА СЕ ОДНОСИ НА ИНВЕРЗНИ ПРОБЛЕМ: АКО ЗНАМО ИСХОД ПРОЦЕСА ШТА МОЖЕМО ЗАКЉУЧИТИ О САМОМ ПРОЦЕСУ? ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА У СТАТИСТИЧКОЈ ТЕРМОДИНАМИЦИ ПОТРЕБНЕ СУ НАМ И ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА. РАЗМОТРИМО САДА ВЕРОВАТНОЋУ.

ПОЈАМ ДОГАЂАЈА

РАЗМОТРИМО ЕКСПЕРИМЕНТ ЧИЈИ ИСХОД НЕ МОЖЕМО ПРЕДВИДЕТИ. РЕАЛИЗАЦИЈА ЕКСПЕРИМЕНТА СЕ УВЕК ОДИГРАВА ПОД УНАПРЕД ДЕФИНИСАНИМ УСЛОВИМА. ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ НЕ МОЖЕ ДАТИ ИСХОДЕ ЕКСПЕРИМЕНТА НЕГО ОНИ МОРАЈУ БИТИ НАМА ПОЗНАТИ УНАПРЕД. СКУП СВИХ МОГУЋИХ ИСХОДА ЕКСПЕРИМЕНТА СЕ НАЗИВА СКУП (ПРОСТОР) УЗОРАКА (СТАЊА), Ω. ОН МОЖЕ САДРЖАТИ КОНАЧАН ИЛИ БЕСКОНАЧАН БРОЈ ЕЛЕМЕНАТА. ДОГАЂАЈИ СУ ПОДСКУПОВИ СКУПА УЗОРАКА. ОНИ СЕ МОГУ ПОДЕЛИТИ НА СЛОЖЕНЕ (САДРЖЕ ВИШЕ ИСХОДА) И ЕЛЕМЕНТАРНЕ (САДРЖЕ ЈЕДАН ИСХОД). ДОГАЂАЈ СЕ ОДИГРАО АКО СЕ ОДИГРАО БИЛО КОЈИ ЊЕГОВ ИСХОД. ПОУЗДАН ДОГАЂАЈ СЕ ОДИГРАВА НЕИЗБЕЖНО (ЧИНИ ГА ЧИТАВ СКУП УЗОРАКА), НЕМОГУЋ ДОГАЂАЈ СЕ НЕ МОЖЕ РЕАЛИЗОВАТИ У ЕКСПЕРИМЕНТУ (ОДГОВАРА МУ ПРАЗАН СКУП $\emptyset$). СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈ СЕ НЕ МОЖЕ УНАПРЕД ПРЕДВИДЕТИ.

<u>ПРИМЕР</u> ЕКСПЕРИМЕНТ, ПРОСТОР УЗОРАКА И ПРИМЕРИ ДОГАЂАЈА

а) БАЦАЊЕ НОВЧИЋА, $\Omega=\{P,G\}$, ДОГАЂАЈ ДА ЈЕ ПАЛО ПИСМО $A=\{P\}$, СВИ ДОГАЂАЈИ: $\{\emptyset,\{P\},\{G\},\{P,G\}\}$

б) БАЦАЊЕ ДВА НОВЧИЋА $\Omega=\{PP,PG,GP,GG\}$, ДОГАЂАЈ ДА ЈЕ У ПРВОМ БАЦАЊУ ПАЛО ПИСМО $A=\{PG,PP\}$

в) БАЦАЊЕ НОВЧИЋА БЕСКОНАЧНО ПУТА $\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots)\mid \omega_i\in\{P,G\}\}$, ДОГАЂАЈ ДА ЈЕ ПИСМО ПАЛО ПРВИ ПУТ НА ДРУГОМ БАЦАЊУ $A=\{(G,P,\omega_3,\omega_4,\dots)\mid \omega_i=\{P,G\}\}$

г) МЕРЕЊЕ ТЕМПЕРАТУРЕ $\Omega=(0,\infty)$, ДОГАЂАЈ ДА ЈЕ ИЗМЕРЕНА ТЕМПЕРАТУРА У ИНТЕРВАЛУ $[10,20]$, $A\in[10,20]$

д) МЕРЕЊЕ ПОЛОЖАЈА ЧЕСТИЦЕ $\Omega=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in R\}$, ДОГАЂАЈ ДА СЕ ЧЕСТИЦА НАЛАЗИ У xOy РАВНИ

$A=\{(x,y,0)\mid x,y\in R\}$

АЛГЕБРА ДОГАЂАЈА

Често нас интересују односи између догађаја. Пошто су догађаји подскупови Ω, операције над скуповима важе и за догађаје.

Ако се догађај A увек реализовао када се реализовао догађај B пишемо $A \subset B$.

Супротни догађај (комплемент) догађају A је $\bar{A}$. Он се састоји од свих елемената скупа Ω који не припадају догађају A. Важе једнакости за комплементе: $\bar{\bar{A}} = A$ и $\bar{\emptyset} = \Omega$.

Ако је $A \subset B$ онда је $\bar{B} \subset \bar{A}$.

Збир $A+B$ два догађаја A и B (унија $A \cup B$) је догађај који се реализује ако се оствари бар један од догађаја A или B. За збир догађаја важе једнакости:

$A+A=A$, $A+\bar{A}=\Omega$, $A+B=B+A$ (комутативност) и $A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоцијативност)

Приметимо да прва једнакост не важи ако је A број. Видећемо касније да операције над догађајима нису исте као над бројевима.

Производ AB два догађаја A и B (пресек $A \cap B$) је догађај који се реализује ако се остварују и A и B догађаји. За производ догађаја важе једнакости: $AB=BA$ (комутативност), $A(BC)=(AB)C$ (асоцијативност), $AA=A$, $A\emptyset=\emptyset$, $A\Omega=A$, $A\bar{A}=\emptyset$. У дистрибутивним законима сабирање и множење могу се међусобно заменити $A+BC=(A+B)(A+C)$. $A(B+C)=AB+AC$

Разлика $A-B$ два догађаја A и B је догађај који се реализује ако се оствари бар један од елементарних догађаја који припадају догађају A али не и догађају B.

Важе једнакости: $A-B=A\bar{B}$, $A-A=\emptyset$, $A-\emptyset=A$, $\emptyset-A=\emptyset$.

Догађаји $A_1, A_2, \dots$ су узајамно искључиви ако је $A_iA_j=\emptyset$ за $i \neq j$. Означимо са $|A|$ број елемената скупа A.

Пример Доказати Де Морганове законе: $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$ и $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$. Ови закони су корисни да повежу производ и збир догађаја преко комплемента. Користе се да би се сложени изрази редуковали на простије.

Решење: Користимо правило да ако важи $A \subset B$ и $B \subset A$ онда је $A=B$. Докажимо прво да је лева страна израза $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$ подскуп десне а касније да је десна подскуп леве.

Ако је $x \in \overline{A+B} \Rightarrow x \notin A+B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A}\bar{B}$. Са друге стране

Ако је $y \in \bar{A}\bar{B} \Rightarrow y \in \bar{A}$ и $y \in \bar{B} \Rightarrow y \notin A$ и $y \notin B \Rightarrow y \notin A+B \Rightarrow y \in \overline{A+B}$. Слично се доказује и друга једнакост.

Пример Разложити догађаје $A+B$ и $A+B+C$ на догађаје који су узајамно искључиви. Узајамно искључиви догађаји имају једноставан израз за вероватноћу њиховог збира.

Решење: $A+B = A+(B-A) = A+B\bar{A} = A(B+\bar{B})+B\bar{A} = AB+A\bar{B}+B\bar{A}$

$A+B+C = A+(B-A)+(C-(A+B)) = A+B\bar{A}+C\overline{(A+B)} = A+B\bar{A}+C\bar{A}\bar{B}$

Пример Три студента полажу испит. Ако су догађаји A, B и C да су студенти положили испит, изразити:

а) да ни један студент није положио
б) да је положио само први студент
в) да је положио само један студент
г) да је положио макар један студент
д) да су положила два студента

Решење:

а) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
б) $A\bar{B}\bar{C}$
в) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$
г) $A+B+C$
д) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

Класична дефиниција вероватноће

Приметимо да често нису сви догађаји подједнако вероватни често се неки одигравају чешће од других. То нас доводи до питања колика је вероватноћа неког догађаја. У класичној дефиницији вероватноће разматрамо експерименте са коначним подједнако вероватним исходима. Тада је вероватноћа догађаја A једнака $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ где су $|A|$ и $|\Omega|$ бројеви елементарних догађаја у A и Ω. Исходи догађаја A, елементарни догађаји се називају повољни догађаји који одговарају догађају A. $|A|$ и $|\Omega|$ се могу одредити комбинаторним методама. Овако дефинисана вероватноћа задовољава три услова:

1° За догађај A, важи $P(A)\geq 0$ јер $|A|$ и $|\Omega|$ не могу бити негативни бројеви.

2° За сигуран догађај Ω важи $P(\Omega)=1$ јер је $P(\Omega)=\frac{|\Omega|}{|\Omega|}=1$.

3° Ако се догађај A разложи на несагласне догађаје A_1 и A_2 онда важи $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$ јер је $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{|A_1|+|A_2|}{|\Omega|}=\frac{|A_1|}{|\Omega|}+\frac{|A_2|}{|\Omega|}=P(A_1)+P(A_2)$

Класична дефиниција вероватноће у себи садржи појам једнаковероватних догађаја и зато не може бити дефиниција вероватноће. Такође, потребан нам је други приступ за експерименте који имају бесконачно много исхода.

<u>Пример</u> Одредити вероватноћу за појављивање парног броја у бацању коцкице.

Решење: $A=A_2+A_4+A_6$ $\quad P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Имамо 6 исхода; три повољна исхода A_2, A_4 и A_6.

<u>Пример</u> У урни се налази N куглица од којих су b беле а остале црне. На случајан начин извлачимо n $(n<N)$ куглица. Наћи вероватноћу да у n извучених куглица буде x белих.

Решење: $|\Omega|$ - укупан број начина да извучемо n куглица од N куглица, $|A|$ је број начина да извучемо x белих куглица из урне са b белих куглица ~~[illegible]~~ и такође извучемо $n-x$ црних куглица од $N-b$ црних куглица из урне. Беле куглице можемо извући на $\binom{b}{x}$ начина а црне на $\binom{N-b}{n-x}$. Укупан број извлачења је производ ова два броја. Тада је

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{b}{x}\binom{N-b}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

<u>Пример</u> Одредити број начина да се расподели N књига на r различитих полица (на сваку N_i књига) без обзира на поредак у полицама. На i-тој полици постоји g_i преграда. Размотрити следеће случајеве:

а) књиге су различите

б) књиге су исте, нема ограничења у погледу броја књига по преградама

в) књиге су исте, највише једна књига може да стане у преграду $(g_i \geq N_i)$

Решење: а) постоји $N!$ начина да поставимо књиге на полице. На првој полици се налази N_1, на другој N_2, ... на r-тој N_r књига. Пошто распоред на свакој полици није важан треба $N!$ поделити са $N_1!N_2!\dots N_r!$. Тиме добијамо мултиномни коефицијент $\frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_r!}$ који представља уопштени биномни коефицијент када N објеката треба да поделимо у r група а поредак унутар

Стога је укупан број различитих распореда $|\Omega| = N! \prod_{i=1} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

б) Размотримо прво размештање N_i кугли између g_i преграда, представимо графички кугле и полице ▢▢▢|▢||▢▢|▢▢▢▢|||▢. Број распореда је еквивалентан размештању $g_i - 1$ црте између N_i кугли, тј избору $g_i - 1$ локације од $N_i + g_i - 1$ укупно броја локација: $\frac{(N_i+g_i-2)!}{N_i!\,(g_i-2)!}$. Када имамо r полица укупан број распореда је $|\Omega| = \prod_{i=1}^{r} \frac{(N_i+g_i-2)!}{N_i!\,(g_i-1)!}$

в) Размотримо број постављања N_i кугли у g_i преграде када може да стане највише једна кугла у преграду. Тај број је једнак избору N_i преграда са једном куглом и $g_i - N_i$ преграда без кугле: $\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$. Укупан број размештања кугли за све полице је $|\Omega| = \prod_{i=1}^{r} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

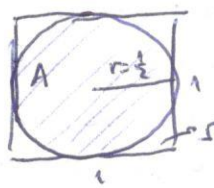
Геометријска вероватноћа

Класичну дефиницију вероватноће можемо уопштити на случај непребројиво бесконачно исхода. Исход експеримента је случајан положај тачке у некој области и интересује нас вероватноћа да се уочена тачка налази у делу те области.

На случајан начин бирамо тачку из области Ω која садржи област A, под претпоставком да је вероватноћа избора тачке пропорционална мери (дужина, површина, запремина) области Ω, онда је вероватноћа да случајно изабрана тачка у области Ω припада области A: $P = \frac{\text{мера области } A}{\text{мера области } \Omega}$

Пример: Колика је вероватноћа да случајно изабрана тачка у квадрату јединичне странице припада уписаном кругу?

Решење:



мера области $\Omega = 1$

мера области $A = \frac{\pi}{4}$

$P = \frac{\pi}{4}$

Статистичка дефиниција вероватноће

Ако се у n понављања експеримента догађај A оствари m пута онда је релативна фреквенција остварења догађаја A једнака $f_r(A) = \frac{m}{n}$. У различитим низовима понављања експеримента са великим вредностима n примећује се да $f_r(A)$ буде приближно исто, при чему су одступања мања што је n веће. Статистичка (емпиријска) вероватноћа догађаја A је број око кога варира релативна фреквенција. Опажање да релативна фреквенција у великом броју извођења експеримента незнатно варира назива се стабилношћу фреквенције.

Овако дефинисана вероватноћа задовољава исте услове као и класична дефиниција вероватноће:

1° За догађај A важи $P(A) \geq 0$ јер је увек $\frac{m}{n} \geq 0$.

2° За поуздан догађај Ω важи $P(\Omega) = 1$ јер је тада $m = n$.

3° За догађај A који се разлаже на искључујуће догађаје A_1 и A_2 важи

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = \frac{m_1+m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

Овако дефинисана вероватноћа има емпиријску утемељеност али није математички потврђена јер заправо не можемо наћи граничну вредност $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = a$. Да би она постојала потребно је да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји број n_0 тако да када је $n > n_0$ буде испуњено $|\frac{m}{n} - a| < \varepsilon$. То није испуњено јер m има случајни карактер и иако знамо да ће $\frac{m}{n}$ ићи у граничну вредност не знамо после колико реализација експеримента ће она бити достигнута. Може се чак десити да се после први по реализацији фреквенција догађаја приближава граничној вредности са високом вероватноћом

$\lim P\left(\left|\frac{m}{n}-a\right|<\varepsilon\right) \to 1$. Таква конвергенција се назива конвергенција у вероватноћи али она у себи већ садржи појам вероватноће и не може се користити за дефиницију вероватноће. Ипак, корисно је интерпретирати вероватноћу преко релативне фреквенције појављивања догађаја.

Аксиоматска дефиниција вероватноће

Претходне дефиниције вероватноће задовољавају исте услове без обзира на њихову интерпретацију. Због тога можемо искористити те услове и дати аксиоматску дефиницију вероватноће која је апстрактна и није везана за неку интерпретацију.

Закон вероватноће додељује сваком догађају A вероватноћу $P(A)$ која је реалан број и задовољава три услова:

1° (ненегативност) За сваки догађај A важи $P(A) \geq 0$

2° (нормализација) Вероватноћа поузданог догађаја је једнака јединици.

3° (адитивност) Ако се догађаји A_1 и A_2 међусобно искључују онда је $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$.

Исто важи за коначан број догађаја $A_1, A_2, \dots, A_n$. У случају бесконачно пребројивог скупа догађаја који су узајамно искључиви потребно је додати аксиому 3': $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Наведимо додатне особине вероватноће:

а) $P(\emptyset)=0$.

б) Ако је $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

в) Вероватноћа је број између 0 и 1, $0 \leq P(A) \leq 1$.

г) Вероватноћа збира догађаја: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Докажимо ово на следећи начин. Раставимо збир догађаја на догађаје који се међусобно искључују. Њихова вероватноћа је једнака збиру вероватноћа искључивих догађаја.

$$P(A+B)=P(A+(B-A))=P(A+B\bar{A})=P(A(B+\bar{B})+B\bar{A})=P(AB+A\bar{B}+B\bar{A})=P(AB)+P(A\bar{B})+P(B\bar{A})=P(A\bar{B})+P(AB)+P(B\bar{A})+P(AB)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

У случају три догађаја A, B, C важи $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

Овај израз добијамо када заменимо $A+B=D$, тада је

$$P(A+B+C)=P(D+C)=P(D)+P(C)-P(DC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P((A+B)C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC+BC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ACBC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Формула за збир догађаја садржи вероватноћу производа догађаја. Да би смо их одредили потребно је да размотримо појам условне вероватноће.

Условна вероватноћа

Често нас не интересује један догађај већ више њих. Поставља се питање да ли вероватноћа да се оствари један догађај утиче на остваривање других догађаја. То је посебно значајно јер често немамо све информације о експерименту него само знамо да се остварио неки догађај. Дакле, интересује нас да одредимо вероватноћу догађаја A под условом да се остварио догађај B. То питање има смисла само ако је пресек догађаја A и B различит од немогућег догађаја. Такву вероватноћу означимо са $P(A|B)$.

Пример: У урни се налази 5 белих и 10 црних куглица. Ако извучемо две куглице једну за другом без враћања куглице, израчунати вероватноћу да обе куглице буду беле.

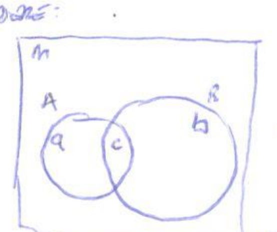
Решење: Нека је догађај A да прва извучена куглица буде бела. Тада је $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, нека је B догађај да друга извучена куглица буде бела. Извлачењем прве куглице, ми смо променили први избор. Сада имамо 4 беле куглице. Стога је $P(B|A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$. Вероватноћа да обе беле куглице је $P(AB) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}}{\frac{15\cdot 14}{2}} = \frac{2}{21}$. Приметимо да важи $P(AB) = P(B|A)\cdot P(A)$

Пример: Бирамо на случајан начин тачку у квадрату површине m. У квадрату се налазе кругови A и B који се секу. Површине кругова A и B и њиховог пресека AB су a, b и c. Одредити вероватноће:

а) да ако је изабрана тачка у кругу A, онда се налази и у кругу B

б) да ако је изабрана тачка у кругу B, онда се налази и у кругу A

Решење:



Вероватноћа да изабрана тачка припада кругу A, кругу B и пресеку AB су:

$$P(A) = \frac{a}{m}, \quad P(B) = \frac{b}{m}, \quad P(AB) = \frac{c}{m}$$

а) Вероватноћа да изабрана тачка припада кругу B ако знамо да припада кругу A је:

$$P(B|A) = \frac{c}{a} = \frac{\frac{c}{m}}{\frac{a}{m}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

б) Вероватноћа да изабрана тачка припада кругу A ако знамо да припада кругу B је:

$$P(A|B) = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Из ових примера можемо закључити да је формула за рачунање условне вероватноће да се оствари догађај A ако знамо да се остварио догађај B: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Она је дефинисана само ако је догађај B остварив, $P(B) \neq 0$. Такође, она задовољава три услова вероватноће. Услов позитивности је испуњен јер је $P(AB) \geq 0$. Услов нормализације је испуњен јер је $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. Приметимо такође да важи $P(B|B) = \frac{P(BB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. Условну вероватноћу дефинише закон вероватноће заправо на скупу B а остале исходе (из $\overline{B}$) можемо одбацити. За два искључујућа догађаја A_1 и A_2 важи адитивност вероватноће $P(A_1+A_2|B) = \frac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)} = P(A_1|B)+P(A_2|B)$.

Условна вероватноћа се може искористити да се одреди производ два догађаја A и B: $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. Ова формула се може уопштити за више догађаја. У случају три догађаја A, B и C формулу можемо извести на следећи начин. Узмимо да је $AB = D$. Тада је $P(ABC) = P(DC) = P(D)P(C|D) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$

Ако је $P(A|B)=P(A)$, то значи да догађај B нема утицаја на остваривање догађаја A, тј. догађај A не зависи од догађаја B. Каже се да су догађаји A и B независни. Тада је $P(A|B)=P(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}$, тј. $P(AB)=P(A)P(B)$. Дакле, за независне догађаје A и B вероватноћа производа догађаја A и B једнака је производу њихових вероватноћа.
Ако су догађаји A и B са позитивним вероватноћама независни они се онда не искључују и обрнуто ако се A и B искључују они су зависни. Три догађаја A, B и C су независни ако важи $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$, $P(AB)=P(A)P(A)$, $P(AC)=P(A)P(C)$ и $P(BC)=P(B)P(C)$.

Пример: Вероватноћа да се распадне једна C-H веза у молекулу CH_4 током времена T услед апсорпције UV зрачења је p. Одредити вероватноћу да се у датом времену распадне макар једна C-H веза.

Решење: Постоје 4 C-H везе у молекулу CH_4. Нека су догађаји да се везе распадну A_1, A_2, A_3 и A_4. Тада је вероватноћа да се распадне макар једна веза $P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$ $=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)=1-\prod_{i=1}^{4}(1-P(A_i))=1-(1-p)^4$. Овде смо искористили да су распади веза независни догађаји што значи и да су независни догађаји и да се везе не распадају.

Случајна променљива

Исходи експеримента често нису бројеви. Извлачење карата из шпила даје исходе који се описују називом карте и бојом. Бацање новчића даје називе страна новчића. Овакви различити начини описа исхода нису погодни за анализу експеримента. Погодније је користити бројеве. У случају бацања новчића можемо користити бројеве 0 и 1 да опишемо исходе (или било који други пар бројева). Када бацамо новчић неколико пута исходе можемо бројчано описати на више начина: бројем добијених глава, разликом бројева добијених глава и писама или бројем бацања новчића до појаве прве главе на пример. Са друге стране, исходи физичких мерења су углавном бројеви. Тада нас интересују не само ти бројеви него и њихове функције. Даље, један експеримент може да резултира у више случајних променљивих.
Случајна променљива повезује простор узорака са бројевима. Она је функција $X:\Omega\to R$ која додељује реалан број $X(\omega)$ сваком исходу експеримента ω. Често се у применама простор узорака занемарује и ради се директно са случајном променљивом X. Простор узорака је увек присутан без обзира што га више не спомињемо.
Иако су случајна променљива и вероватноћа дефинисане на скупу узорака постоји разлика између њих. Вероватноћа је функција догађаја (подскупова Ω) док је случајна променљива функција тачака (елементарних догађаја). Поставља се питање како повезати вероватноћу и случајну променљиву односно наћи вероватноћу да случајна променљива узима одређене вредности. За то нам треба инверзна функција дефинисана на подскупу A реалне осе: $X^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}$. Она зада исходе експеримента које случајна променљива пресликава на подскуп A. Тада је вероватноћа $P(X\in A)=P(X^{-1}(A))=P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\})$. Да бисмо избегли одређивање вероватноће за све подскупове на реалној оси уводимо појам функције (кумулативне) расподеле вероватноће $F(x)$ из које можемо добити све особине вероватноће за случајну променљиву. Она представља вероватноћу да случајна променљива X има вредност мању или једнаку од x, $F(x)=P(X\le x)$ и представља функцију

Наше између тачака a и b. Означимо са A, B и C догађаје $X \le a$, $X \le b$ и $a < X \le b$. Тада је $B = A + C$ и A и C су међусобно искључиви догађаји. Стога је $P(B) = P(A) + P(C)$, то $P(C) = P(B) - P(A)$.
Даље важи релација $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$.

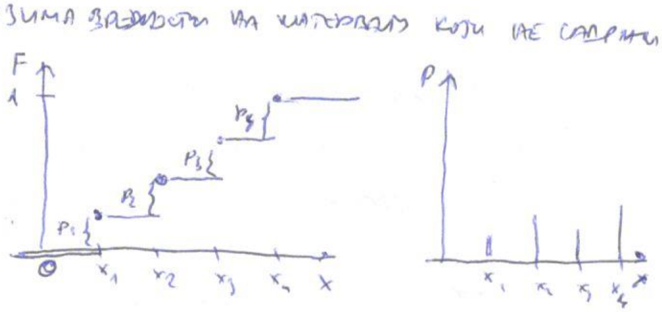
Функција расподеле вероватноће задовољава следеће услове:

1. Узима вредности између 0 и 1 за свако x, $0 \le F(x) \le 1$.
2. Граничне вредности у бесконачности су $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ је неопадајућа функција јер важи $F(x+\epsilon) - F(x) = P(x < X \le x+\epsilon) \ge 0$ за $\epsilon > 0$
4. $F(x)$ је непрекидна функција са десне стране $\lim_{\epsilon \to 0} F(x+\epsilon) = F(x)$

Ови услови нам говоре да је $F(x)$ неопадајућа функција од 0 до 1 уз могућност постојања прекида у неким тачкама.

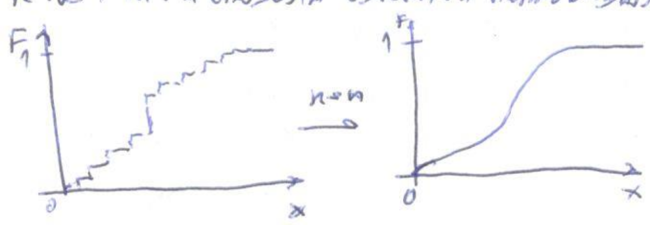
Свака ~~функција~~ функција расподеле вероватноће се може представити у облику збира три члана
$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$, где су a_1, a_2 и a_3 коефицијенти уз услов $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. $F_1(x)$ одговара дискретној функцији расподеле вероватноће са коначним или пребројиво бесконачним бројем прекида. $F_2(x)$ је непрекидна функција расподеле вероватноће која је диференцијабилна у скоро свим тачкама. $F_3(x)$ представља сингуларну функцију расподеле вероватноће која има извод једнак нули ако постоји, тај члан је патолошки члан и ретко се појављује у примерима. Он одговара непрекидним функцијама које скоро нигде нису диференцијабилне.

Размотримо прво ~~функцију~~ функцију расподеле вероватноће повезану са дискретном случајном променљивом која узима вредности у пребројиво много тачака x_i. Она има скокове p_i у тачкама x_i и не мења вредност између тих тачака. Пошто је $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ онда је вероватноћа да случајна променљива узима вредности на интервалу који не садржи ниједну од тачака једнака нули. Скокови функције $F(x)$ у тачкама x_i



представљају вероватноћу када случајна променљива узима вредност у тачкама x_i, $P(X = x_i) = p_i$. Скуп парова $\{(x_i, p_i)\}$ се назива расподела вероватноће случајне променљиве X. p_i узимају вредности између 0 и 1 а њихов збир је једнак јединици. $F(x)$ се добија из вероватноћа p_i преко израза $F(x) = \sum_{i,\, x_i \le x} p_i$

Шта се дешава када број вредности случајне променљиве расте? Тада је број прекида већи али скокови су мањи. Степенаста функција се претвара у непрекидну криву у граничном случају када $n \to \infty$. Та расподела одговара непрекидној случајној променљивој. Пошто је $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$,



за ~~a=b~~ добијамо $P(a < X \le a) = P(X = a) = 0$. Дакле вероватноћа да се реализује нека тачка у експерименту где посматрамо непрекидну случајну променљиву је практично нула. То значи да се у великом броју понављања експеримента та тачка неће често појављивати.

Вероватноћа да случајна променљива X узима вредности на интервалу Δx је $P(x < X \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. То можемо искористити да дефинишемо густину ~~ра~~ расподеле вероватноће $f(x) = \lim \frac{P(x < X \le x + \Delta x)}{\Delta x} =$

Знајући $f(x)$ можемо одредити вероватноћу да случајна променљива узима вредност на интервалу $(a,b]$: $P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx$. Такође, $F(x)$ можемо израчунати преко израза $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Услове које задовољава $f(x)$ су да је нормализована на јединицу и да је ненегативна функција ($f(x)\ge 0$).

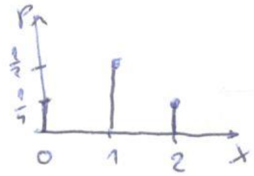
Користећи делта функцију, можемо написати густину расподеле вероватноће за дискретну случајну променљиву $f(x)=\sum_i p_i\,\delta(x-x_i)$.

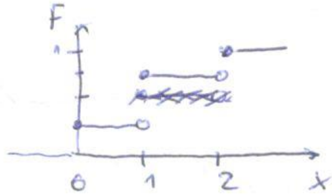
Пример Новчић се баца два пута. Наћи расподелу вероватноће и функцију расподеле вероватноће за случајну променљиву која је једнака броју добијених глава.

Решење:

Елементарни догађаји	ω:	GG	PG	GP	PP
Број глава	$X(\omega)$:	2	1	1	0
Вероватноћа	$P(\omega)$:	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$

$$X=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \end{Bmatrix} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac14 & 0\le x<1 \\ \frac34 & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

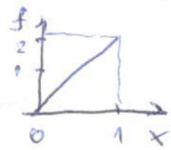


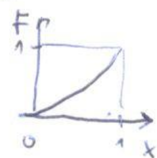


Пример Непрекидна случајна променљива X је дефинисана на интервалу $[0,1]$ и има густину расподеле вероватноће $f(x)=x$. Нормализовати густину и наћи функцију расподеле вероватноће.

Решење: $1=\int_0^1 C f(x)dx = C\int_0^1 x\,dx = C\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{C}{2} \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=2x$

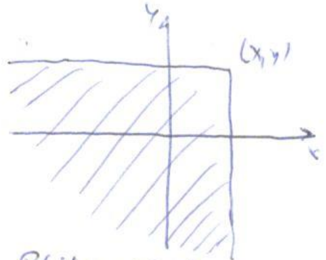
$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = x^2$$



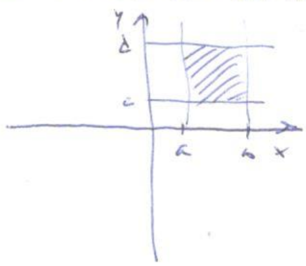


~~[illegible]~~ Случајни вектори

N случајних променљивих (N-димензионална случајна променљива) могу се интерпретирати као случајне тачке (вектори) у N-димензионалном простору. Због једноставности разматрамо дводимензионалну случајну променљиву (X,Y). Функција расподеле вероватноће је тада $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ и она представља вероватноћу да случајно изабрана тачка лежи лево и испод тачке (x,y) у бесконачном квадранту.



$P(X\le x, Y\le y)$



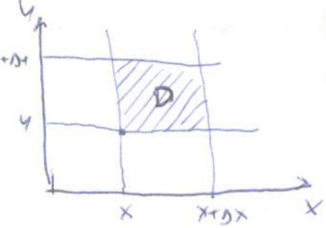
Вероватноћа да случајна тачка (X,Y) лежи у правоугаонику $a<X\le b$ и $c<Y\le d$ је $P(a<X\le b, c<Y\le d)=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$.

$F(x,y)$ задовољава исте услове по компонентама као и униваријантна функција расподеле вероватноће.

За две дискретне случајне променљиве X и Y, биваријантна расподела вероватноће је скуп тројки $\{(x_i, y_j, p_{ij})\}$ где су x_i и y_j вредности X и Y а вероватноћа повезана са њима је $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$. Важе услови за вероватноће $0\le p_{ij}\le 1$ и $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$. Функција расподеле вероватноће је тада

$$F(x,y)=\sum_{i,\,x_i\le x}\ \sum_{j,\,y_j\le y} p_{ij}.$$

Непрекидна дводимензионална случајна променљива (X,Y) се карактерише густином расподеле вероватноће $f(x,y)$. До ње долазимо на следећи начин. Ако изаберемо тачку (x,y) у равни, онда вероватноћа да случајно изабрана тачка лежи у правоугаонику са теменима (x,y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$ и $(x+\Delta x, y+\Delta y)$



износи $P((X,Y)\in D) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) + F(x,y)$

Густина расподеле вероватноће је $f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P((X,Y)\in D)}{\Delta x \Delta y} = \frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y} =$

$$= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$f(x,y)$ задовољава услове $f(x,y)\ge 0$ и $\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Ако је позната густина расподеле вероватноће $f(x,y)$ онда функцију расподеле вероватноће можемо изразити

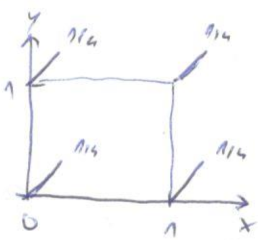
$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$, вероватноћа да случајно изабрана тачка лежи у области A је

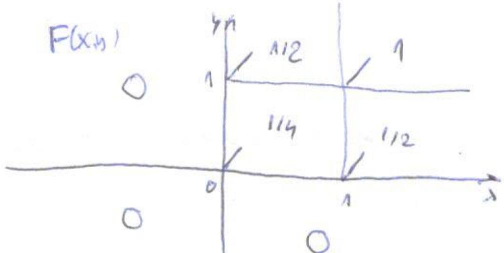
$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

Пример Бацају се два новчића. X и Y су број глава у првом и другом новчићу. Одредити расподелу вероватноће и функцију расподеле вероватноће.

исход	ω	PP	PG	GP	GG
број глава	(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
вероватноће	$P(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

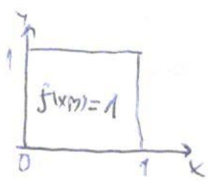
p_{ij} (Y \ X)	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

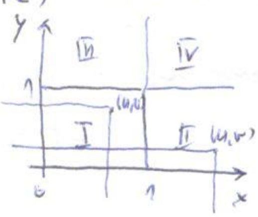




$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0,\ -\infty < y < 0 \\ & x>0,\ y<0 \\ & x<0,\ y>0 \\ \frac{1}{4} & 0\le x<1,\ 0\le y<1 \\ \frac{1}{2} & x\ge 1,\ 0\le y<1 \\ & 0\le x<1,\ y\ge 1 \\ 1 & x\ge 1,\ y\ge 1 \end{cases}$$

Пример Наћи густину расподеле вероватноће и функцију расподеле вероватноће дводимензионалне случајне променљиве која има равномерну расподелу на квадрату $0\le x\le 1$ и $0\le y\le 1$. Одредити вероватноће а) $P(X>0{,}1,\ Y>0{,}2)$ б) $P(X<0{,}5)$ и в) $P(X<Y)$.





I $F(u,v) = \int_0^u dx \int_0^v dy = uv$

II $F(u,v) = \int_0^1 dx \int_0^v dy = v$

III $F(u,v) = \int_0^1 dy \int_0^u dx = u$

IV $F(u,v) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy = 1$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{осталo} \\ xy & 0\le x<1,\ 0\le y<1 \\ x & x\ge 1,\ 0\le y<1 \\ y & 0\le x<1,\ y\ge 1 \\ 1 & x\ge 1,\ y\ge 1 \end{cases}$$

а) $P(X>0{,}1,\ Y>0{,}2) = \int_{0,1}^{1} dx \int_{0,2}^{1} dy = 0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}72$

б) $P(X<0{,}5) = \int_0^{0,5} dx \int_0^1 dy = 0{,}5$

в) $P(X<Y) = \int_0^1 dy \int_y^1 dx = \int_0^1 (1-y)\,dy = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Условна расподела вероватноће

Размотримо прво маргиналне расподеле вероватноће. То су расподеле вероватноће појединачних случајних променљивих које су добијене из расподеле вероватноће случајних вектора. Посматрамо случај дводимензионалне случајне променљиве (X,Y).

За дискретне случајне променљиве маргиналне расподеле вероватноће износе:

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P(X=x_i) \qquad i=1,2,\dots n$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P(Y=y_j) \qquad j=1,2,\dots m$$

Њих добијамо тако што у табели расподеле вероватноће сабирамо све елементе једне колоне или реда а резултате

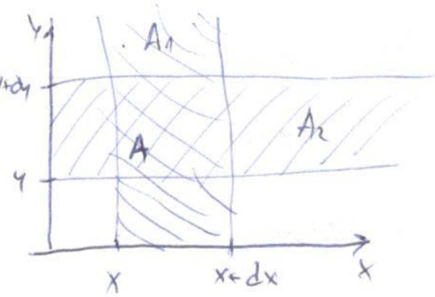
За непрекидне случајне променљиве, маргиналне густине расподеле вероватноће се добијају тако што се посматрају вредности функције расподеле вероватноће за $x\to\infty$ или $y\to\infty$. За $y\to\infty$ је $F_1(x)=F(x,\infty)=P(X\le x, Y\le\infty)$ $=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,dv$, маргинална густина расподеле вероватноће случајне променљиве X је $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$ јер је $F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}f_1(t)\,dt$. Исто тако за $x\to\infty$, $F_2(y)=F(\infty,y)=P(X\le\infty, Y\le y)=$ $=P(Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}dv\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,du$. Маргинална густина расподеле случајне променљиве Y је $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx$ јер је $F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}f_2(t)\,dt$.

У случају више од две случајне променљиве, маргиналне густине расподеле вероватноће можемо дефинисати за било који подскуп случајних променљивих.

Раније смо видели да вероватноћа производа два догађаја није увек једнака производу њихових вероватноћа јер догађаји могу бити зависни. Због тога смо дефинисали условну вероватноћу. Слично важи да случајне променљиве узимају одређене вредности. Тада је битна расподела повезана са условном расподелом вероватноће.

За дискретне случајне променљиве X и Y, условна расподела вероватноће $P(Y=y_j|X=x_i)$ за променљиву Y када нам је вредност променљиве X позната једнака је $P(Y=y_j|X=x_i)=\dfrac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\dfrac{p_{ij}}{p_i}$. Слично $P(X=x_i|Y=y_j)$, условна расподела вероватноће променљиве X ако нам је позната вредност променљиве Y је $P(X=x_i|Y=y_j)=\dfrac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\dfrac{p_{ij}}{p_j}$

У случају непрекидних случајних променљивих X и Y разматрамо догађаје да оне узимају вредности у неком интервалу, узмимо елементарни правоугаоник A са страницама dx и dy око тачке (x,y).



Вероватноћа да изаберемо тачку у области A је $P((x,y)\in A)=P(x<X\le x+dx, y<Y\le y+dy)=f(x,y)\,dx\,dy$. Овде заправо имамо два догађаја A_1 и A_2 да тачке падају у појас $(x<X\le x+dx)$ и $(y<Y\le y+dy)$. Користећи формулу производа два догађаја добијамо

$$f(x,y)\,dx\,dy=P(x<X\le x+dx)\cdot P(y<Y\le y+dy\,|\,x<X\le x+dx)=P(y<Y\le y+dy)\,P(x<X\le x+dx\,|\,y<Y\le y+dy)$$

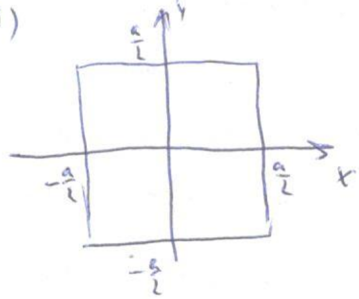
$$f(x,y)\,dx\,dy=f_1(x)dx\,f(y|x)\,dy=f_2(y)dy\,f(x|y)\,dx$$

Условне густине вероватноће су $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$, $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}$

Две случајне променљиве X и Y су независне ако је $f(x|y)=f_1(x)$ и $f(y|x)=f_2(y)$ (за непрекидне променљиве) или $P(X=x_i|Y=y_j)=P(X=x_i)$ и $P(Y=y_j|X=x_i)=P(Y=y_j)$ (за дискретне променљиве). У том случају је $f(x,y)=f_1(x)\,f_2(y)$ (за непрекидне променљиве) или $p_{ij}=p_i\cdot p_j$ (за дискретне променљиве). Такође важи $F(x,y)=F_1(x)\,F_2(y)$

<u>Пример</u> Положај дводимензионалне тачке (X,Y) једнако је вероватан унутар а) квадрата странице a б) круга полупречника a центрираних у координатном почетку. Одредити маргиналне расподеле вероватноће случајних променљивих X и Y и њихове условне густине расподеле. Да ли су случајне променљиве X и Y независне?

а)



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2},\ -\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

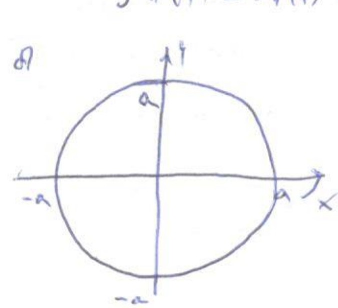
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx = \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{остало} \end{cases} \qquad f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, случајне промењиве X и Y су независне.

б)



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & x^2+y^2 \le a^2 \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2} & |x| \le a \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

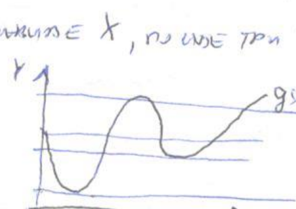
$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx = \frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2} & |y| \le a \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} & |y| \le a \\ 0 & \text{остало} \end{cases} \qquad f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a^2-y^2}} & |x| \le a \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

$f_1(x) f_2(y) = \frac{4\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}}{\pi^2 a^4} \neq f(x,y)$, случајне промењиве X и Y су зависне.

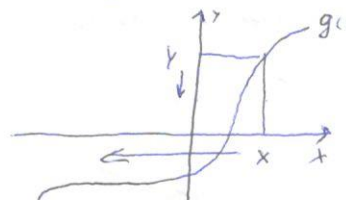
ТРАНСФОРМАЦИЈА СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

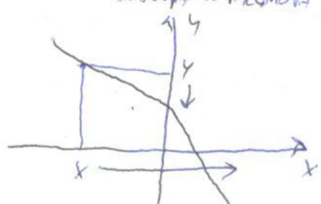
Случајна промењива $Y = g(X)$ се назива трансформацијом случајне промењиве X, интересује нас да одредимо њену расподелу вероватноће. У дискретном случају, расподела вероватноће је дата $P(Y=y_i) = P(g(X)=y_i) = P(\{x \mid g(x)=y_i\}) = P(X \in g^{-1}(y_i))$. У случају непрекидне случајне промењиве X, постоје три корака за налажење густине расподеле вероватноће промењиве Y:



1. За свако y наћи скуп $A_y = \{x \mid g(x) \le y\}$
2. Наћи функцију расподеле вероватноће $G(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(\{x \mid g(x) \le y\}) = \int_{A_y} f(x)\, dx$
3. Густина расподеле вероватноће износи $f(y) = \frac{dG(y)}{dy}$

Када је $g(x)$ монотоно растућа или опадајућа функција онда је $G(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \begin{cases} P(X \le g^{-1}(y)) = F(g^{-1}(y)) & \text{растућа} \\ P(X \ge g^{-1}(y)) = 1 - P(X \le g^{-1}(y)) = 1 - F(g^{-1}(y)) & \text{опадајућа} \end{cases}$





Стога је $f(y) = \begin{cases} f(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} & \text{растућа} \\ f(g^{-1}(y)) \ \frac{dg^{-1}(y)}{...} \end{cases}$

Ова два случаја се могу представити преко једне формуле $f(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$

У случају дводимензионалне случајне променљиве X_1 и X_2, бивариантна густина расподеле вероватноће случајних променљивих Y_1 и Y_2 пресликаних бијективним пресликавањем $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ и $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ је дата изразом $f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)|J| = f(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)) \left| \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (y_1, y_2)} \right|$

Пример Нека је дат закон расподеле вероватноће случајне променљиве $X = \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{Bmatrix}$. Наћи закон расподеле вероватноће за $Y = X^2$.

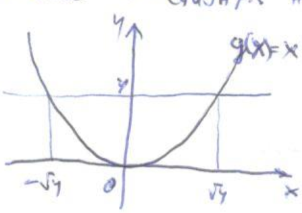
Решење: $y_i = x_i^2$ Потребно је сабрати све вероватноће које су повезане са истом вредношћу y_i:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	4	1	0	1	4
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$Y = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{Bmatrix}$$

Пример Случајна променљива X има густину расподеле вероватноће $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$. Одредити густину расподеле вероватноће за $Y = X^2$.

Решење: Функција $y = x^2$ није монотона на $-\infty < x < \infty$. Само за $y > 0$ постоје вредности $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$ тако да је $x^2 \leq y$



$$G(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

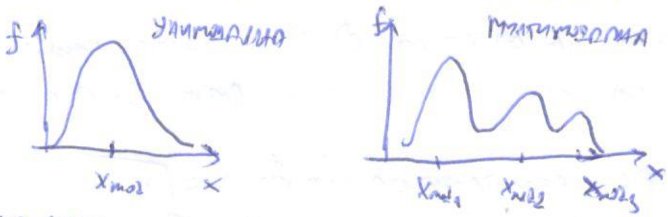
Овај интеграл нема аналитички облик и зато користимо $F(x)$ функцију.

$$f(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} - \frac{f(-\sqrt{y})}{-2\sqrt{y}} = \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, 2\sqrt{y}} = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} \quad \text{за } y > 0$$

Бројчане карактеристике расподеле вероватноће случајне променљиве

Често не знамо или не можемо да одредимо густину расподеле вероватноће случајне променљиве. Често можемо одредити само неколико бројева који карактеришу ту расподелу. Ти бројеви се могу поделити у две групе: они који описују центар растурања вредности случајне променљиве у експерименту и они који описују опсег вредности око тачке нагомилавања вредности случајне променљиве.

Мод је највероватнија вредност случајне променљиве или вредност случајне променљиве за коју густина расподеле вероватноће има максимум.



Средња (очекивана) вредност случајне променљиве X је $\langle X \rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \end{cases}$

Она има исти смисао као центар тежине дискретне масе у механици. Аритметичка средина великог броја узорака конвергира у вероватноћи ка средњој вредности.

Ако је $Y = g(X)$ трансформација случајне променљиве X онда је $\langle Y \rangle = \langle g(X) \rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx \end{cases}$

n-ти момент око координатног почетка (обични момент) представља уопштење средње вредности (првог момента), он износи $m_n = \langle X^n \rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^n p_i \\ \int \end{cases}$

Дефинишимо обичне моменте можемо увести на случајни вектор (X, Y):

$$m_{nm} = \langle X^n Y^m \rangle = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i^n y_j^m p_{ij} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m f(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

у случају $n=0$ и $m=0$ момент се редукују на моменте маргиналне расподеле вероватноће за промењиве Y и X. Такође, можемо одредити очекивану вредност за трансформацију $Z = g(X,Y)$:

$$\langle Z \rangle = \langle g(X,Y) \rangle = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

Особине средње вредности су:

1. $\langle C \rangle = C$, C је константа
2. $\langle CX \rangle = C \langle X \rangle$
3. $\langle X_1 + X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle$
4. $\langle X_1 \cdot X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle \cdot \langle X_2 \rangle$ ако су X_1 и X_2 независне случајне промењиве

n-ти централни момент око средње вредности се дефинише на следећи начин:

$$\mu_n = \langle \delta X^n \rangle = \langle (X - \langle X \rangle)^n \rangle = \begin{cases} \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^n p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^n f(x)\,dx \end{cases}$$

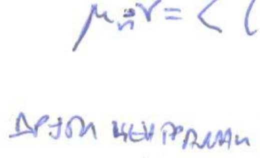
Други централни момент се назива варијанса (дисперзија) и она је једнак квадрату стандардне девијације: $\mu_2 = \langle \delta X^2 \rangle = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 - 2X\langle X \rangle + \langle X \rangle^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - 2\langle X \rangle \langle X \rangle + \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$, тј. $\mu_2 = m_2 - m_1^2$. Слично релације постоје и између централних и обичних момената n-тог реда.

За биваријантну расподелу вероватноће случајних промењивих X и Y можемо дефинисати централне моменте $\mu_{nm} = \langle (X - \langle X \rangle)^n (Y - \langle Y \rangle)^m \rangle$. Коваријанса је момент

$$\mu_{11} = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle.$$

Пример: Случајна тачка је равномерно распоређена на а) круг б) лопти полупречника a. Наћи средњу вредност растојања тачке од центра. Колико она износи када број димензија $n \to \infty$?

а)

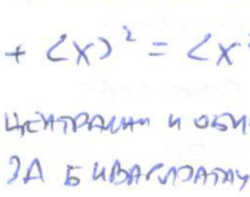


$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & x^2 + y^2 \le a^2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Растојање тачке од центра $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\langle r \rangle = \iint_{\text{круг}} \sqrt{x^2+y^2}\, f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\text{круг}} r \frac{1}{\pi a^2} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2\,dr = \frac{2}{3} a$$

б)



$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} & x^2+y^2+z^2 \le a^2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\langle r \rangle = \iiint_{\text{лопта}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\text{лопта}} r \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^a r^3\,dr = \frac{3}{4} a$$

За n-димензија $\langle r \rangle = \frac{n}{n+1} a$, $\lim \langle r \rangle = \lim \frac{n}{n+1} a = a$.

СПЕЦИЈАЛНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Постоји бесконачно много случајних променљивих, ипак, у примени се често јављају неколико случајних променљивих чије особине је потребно знати.

Размотримо прво дискретне случајне променљиве

Дискретна униформна расподела вероватноће за дати цео број $n \geq 1$ има облик $P(X=x) = \frac{1}{n}$, $x = 1, 2, \dots, n$. Даље, она има исту вероватноћу за сваку вредност X.

Бернулијева расподела вероватноће се појављује у експерименту са два догађаја (неки догађај се одиграо или се није одиграо). Случајна променљива X узима вредност 1 ако се догађај одиграо и 0 ако није.

Тада је $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$, $0 \leq p \leq 1$. Расподела вероватноће износи $P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$.

Биномна расподела вероватноће се односи на случај понављања експеримента са два догађаја n пута. Уколико су реализације експеримента независне. Тада је случајна променљива X која броји реализације експеримента у којима се догађај одиграо једнака збиру бернулијевих случајних променљивих X_i за свако извођење експеримента, $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Пошто постоји $\binom{n}{x}$ начина да се позитивно реализује x експеримената од n, расподела вероватноће за X је $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$

Мултиномна расподела вероватноће је мултиваријантна верзија биномне расподеле. Она одговара случајном вектору $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, од којих свака компонента представља случајну променљиву која узима вредност 1 ако се догађај A_k одиграо са вероватноћом p_k и 0 ако није. Ако се у n независних реализација експеримента догађај A_k одиграо x_k пута, онда је расподела вероватноће X дата са $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_n = x_n) = \binom{n}{x_1\, x_2 \cdots x_m} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_m^{x_m}$, где је мултиномни коефицијент $\binom{n}{x_1 x_2 \cdots x_m} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_m!}$ уз услов $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$. Маргиналне расподеле вероватноће за сваку компоненту X су биномне расподеле.

Геометријска расподела означава број реализација експеримента до појаве првог догађаја. Њена расподела вероватноће је $P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \dots$

Случајна променљива има Поасонову расподелу вероватноће са параметром λ ако је $P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$ Она се користи за бројање ретких догађаја.

Размотримо такође и три непрекидне случајне променљиве.

Униформна непрекидна густина расподеле вероватноће је дефинисана на интервалу $[a, b]$ и износи $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Ако је дефинисана у области A, за случајни вектор $(X_1, X_2, \dots X_n)$ она износи

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\text{мера области } A}.$$

Експоненцијална расподела се користи да се опише време чекања између ретких догађаја или време трајања неког процеса. За параметар $\lambda > 0$, њена густина расподеле вероватноће је $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$, $x > 0$.

Гаусова (нормална) расподела је облика $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}$ на интервалу $(-\infty, \infty)$.

m_1 је средња вредност расподеле а σ је стандардно одступање. Појављује се веома често у природи и зато се зове нормална расподела.

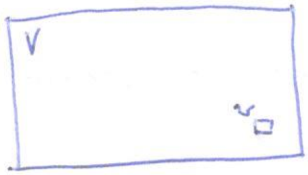
Под одређеним условима расподеле вероватноћа неких специјалних случајних променљивих се могу претворити у расподеле неких других специјалних случајних променљивих.

<u>Пример</u> Суд запремине V садржи гас са N молекула. Изабрани мали део те запремине v садржи n молекула. а) Наћи расподелу вероватноће $P(X=n)$ б) показати да када су N и V велики, онда $P(X=n)$ постаје приближно једнако Поасоновој расподели в) показати да када су N и n велики, онда $P(X=n)$ постаје приближно једнако Гаусовој расподели.

Решење.

Вероватноћа да се један молекул нађе у запремини v је $p = \frac{v}{V}$. Неки молекули јесу или нису у запремини v. Понављамо тај експеримент за све молекуле. Онда је број

б)



Ако је V велико, тада је $p = \frac{v}{V}$ мало, посматрамо јако мала вероватноћа да се неки молекули нађу у запремини v. Приликом великог N и малог p је $\lambda = Np$.

Стога је $p = \frac{\lambda}{N}$ па је $P(X=n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!}\frac{\lambda^n}{N^n}$

$\cdot\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-n}$. Размотримо шта се дешава када $N\to\infty$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = 1, \quad \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N = e^{-\lambda}, \quad \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-n} = 1.$$

Стога је $P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Приметимо да је $\lambda = Np$ средња вредност биномне расподеле.

в) Користимо Стирлингову апроксимацију за факторијеле: $\ln N! = N\ln N - N \Rightarrow N! \approx e^{N\ln N - N}$

Тада је $P(X=n) = e^{N\ln N - N - (N-n)\ln(N-n) + N - n - n\ln n + n + n\ln p + (N-n)\ln(1-p)} = e^{-Ng(n)}$

$$g(n) = -\ln N + \left(1-\frac{n}{N}\right)\ln(N-n) + \frac{n}{N}\ln n - \frac{n}{N}\ln p - \left(1-\frac{n}{N}\right)\ln(1-p)$$

Потребно је наћи минимум функције $g(n)$ и онда развити по близини од минимума (видети уводно предавање). $g'(n) = -\frac{1}{N}\ln\left(\frac{N}{n}-1\right) + \frac{1}{N}\ln\left(\frac{1}{p}-1\right)$ $\quad g'(n_0) = 0 \Rightarrow n_0 = Np$

$g''(n) = \frac{1}{n(N-n)} \Rightarrow g''(n_0) = \frac{1}{N^2p(1-p)}$. Тада је $P(X=n) \approx e^{-N\left(g(n_0) + \frac{(n-Np)^2}{2N^2p(1-p)} + \dots\right)}$

$\approx C e^{-\frac{(n-Np)^2}{2Np(1-p)}}$ што одговара Гаусовој расподели са средњом вредношћу Np и стандардном девијацијом $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$ (исте као код биномне расподеле).